

Corrigé proposé par YAHYA.HABBANI
yahyahabbani@gmail.com
CPGE OUJDA

Le microscope à effet tunnel

1 Onde de De Broglie :

1.1 Relation entre la physique classique et la physique quantique :

On juge que la première tranche de la question est mal posée! et toute réponse logique comme celle de dessous est acceptable.

-C'est la relation de Louis De Broglie reliant le comportement corpusculaire de la matière (physique classique) et son comportement ondulatoire (physique quantique).

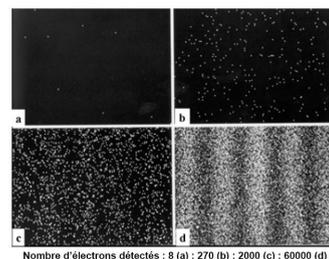
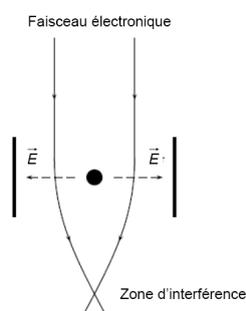
-Parmis les faits et phénomènes physiques causes de la naissance de la physique quantique on cite :

.Les spectres atomiques.

.L'effet photoélectrique.

.Le rayonnement du corps noir : catastrophe de l'UV.

1.2 Description d'une expérience illustrant l'onde de matière :



Le faisceau électronique incident accéléré par une ddp de l'ordre $50kV$ est dirigé vers trois électrodes, une centrale cylindrique de diamètre de l'ordre du μm et portée à un potentiel de $10V$ (représentée sur le schéma de gauche par un gros point noir) et deux autres électrodes latérales liées à la terre et distantes de $10mm$ et par suite déviation des électrons sous l'effet du champ électrostatique établi de part et d'autre de l'électrode centrale et se recouvrent pour donner la figure d'interférence donnée sur l'image de la figure de droite ci-dessus.

1.3 Relation de Louis De Broglie :

Cette relation est :

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Interprétation : à toute particule est associée une onde c'est à dire que la matière a un double comportement corpusculaire et ondulatoire.

1.4 Expression de la vitesse de l'électron dans le cadre classique :

Soit $W(\vec{F}) = eU_a$ le travail de la force électrostatique $\vec{F} = -e\vec{E}$ accélératrice de l'électron considéré alors, D'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_e^2 = W(\vec{F}) = eU_a \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2eU_a}{m_e}}$$

1.5 Les Longueurs d'ondes associées à l'électron dans les trois cas :

Expression de la longueur d'onde et applications numériques dans les trois cas envisagés :

-Expression de la longueur d'onde associée à l'électron :

$$\lambda_e = \frac{h}{\sqrt{2m_e e U_a}}$$

-Applications numériques :

$$\lambda_1 = 38.8pm$$

$$\lambda_2 = 3.88pm$$

$$\lambda_3 = 1.23pm$$

-Validité de l'hypothèse non relativiste :

L'hypothèse non relativiste est valable uniquement pour $U_{a1} = 1kV$ et non valable dans les deux autres situations.

1.6 Description de l'état d'une particule :

Pour décrire le comportement ondulatoire de la particule considérée.

1.7 Significations de certaines grandeurs :

Donnons les significations physiques des grandeurs suivantes :

$-\psi(x, t)$ est la fonction d'onde décrivant la particule c'est à dire le champ scalaire décrivant l'onde associée à la particule.

$|\psi(x, t)|^2$ est la densité linéique de probabilité en x à l'instant t .

$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$ veut dire que trouver la particule sur l'axe (Ox) est un événement sûr.

1.8 Equation de conservation de la probabilité de présence d'une particule :

On a

$$\vec{j}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(x, t)\vec{\nabla}\psi^*(x, t) - \psi^*(x, t)\vec{\nabla}\psi(x, t)]$$

Donc

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\vec{\nabla}\psi(x, t) \cdot \vec{\nabla}\psi^*(x, t) + \psi(x, t)\Delta\psi^*(x, t) - \vec{\nabla}\psi^*(x, t) \cdot \vec{\nabla}\psi(x, t) - \psi^*(x, t)\Delta\psi(x, t)]$$

Et par suite :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(x, t)\Delta\psi^*(x, t) - \psi^*(x, t)\Delta\psi(x, t)] \quad (1)$$

Et d'après l'équation de Schrodinger on a :

$$i\hbar \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) \Rightarrow -i\hbar \frac{\partial\psi^*(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi^*(x, t) + V(x)\psi^*(x, t)$$

Et par suite :

$$i\hbar\psi^*(x, t) \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^*(x, t)\Delta\psi(x, t) + V(x)\psi^*(x, t)\psi(x, t) \quad (2)$$

Et

$$-i\hbar\psi(x, t) \frac{\partial\psi^*(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi(x, t)\Delta\psi^*(x, t) + V(x)\psi(x, t)\psi^*(x, t) \quad (3)$$

$$(2) - (3) \Rightarrow i\hbar[\psi^*(x, t) \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} + \psi^*(x, t) \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}] = -\frac{\hbar^2}{2m}[\psi^*(x, t)\Delta\psi(x, t) - \psi(x, t)\Delta\psi^*(x, t)] \quad (4)$$

Or

$$i\hbar[\psi^*(x, t) \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t} + \psi^*(x, t) \frac{\partial\psi(x, t)}{\partial t}] = i\hbar \frac{\partial|\psi(x, t)|^2}{\partial t} = i\hbar \frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t}$$

Donc

$$\frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} [\psi^*(x, t)\Delta\psi(x, t) - \psi(x, t)\Delta\psi^*(x, t)] \quad (5)$$

Les deux équations (1) et (5) donnent finalement :

$$\frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x, t) \Rightarrow \frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x, t) = 0 \quad (6)$$

-Interprétation : C'est l'équation de conservation de la probabilité de présence de la particule dans un domaine donné.

-Cas du régime stationnaire :

$$\frac{\partial\rho(x, t)}{\partial t} = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{j}(x, t) = 0$$

Donc en régime stationnaire le vecteur densité de courant de probabilité est à flux conservatif.

1.9 Expression du vecteur densité de courant de probabilité :

On a :

$$\vec{j}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} [\psi(x, t) \vec{\nabla} \psi^*(x, t) - \psi^*(x, t) \vec{\nabla} \psi(x, t)]$$

Or :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \psi(x, t) &= i \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \psi(x, t) \vec{e}_x \\ \vec{\nabla} \psi^*(x, t) &= -i \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \psi^*(x, t) \vec{e}_x \end{aligned}$$

donc :

$$\vec{j}(x, t) = \frac{i\hbar}{2m} \left(-i \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right) [\psi(x, t) \psi^*(x, t) + \psi^*(x, t) \psi(x, t)] \vec{e}_x$$

Donc :

$$\vec{j}(x, t) = \frac{\hbar}{m} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} |\psi(x, t)|^2 \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j}(x, t) = \frac{\hbar}{m} A^2 \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \vec{e}_x$$

1.10 Particule décrite par une OPPM :

Traisons le cas de la particule libre décrite par une OPPM :

-Particule libre c'est à dire l'énergie potentielle est nulle et la fonction d'onde ne dépend que de x et t donc l'équation de Schrodinger s'écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

En tenant compte de l'expression de $\psi(x, t)$ on aura : $k^2 = \frac{2m\omega}{\hbar}$.

-Expression de l'énergie E en fonction de ω :

$$E = E_c + V(x) = E_c = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow E = \hbar\omega$$

-On a $\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |A|^2 dx = +\infty$ sinon $A = 0$ donc l'OPPM n'est pas normalisable.

1.11 Vecteur densité de courant de probabilité dans le cas d'une OPPM :

On a $f(x, t) = kx - \omega t$ donc $\frac{\partial f(x, t)}{\partial x} = k$ et par suite :

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{m} A^2 k \vec{e}_x = \frac{\hbar}{m} A^2 \vec{k}$$

Avec \vec{k} est le vecteur propagation de l'onde décrivant la particule en question (vecteur d'onde).

2 Reflexion sur un mur de potentiel :

2.1 Cadre classique :

Selon la mécanique classique :

-Si $E < V_0$, le mouvement des particules dans la zone $x > 0$ n'est pas possible.

- Si $E > V_o$, les particules peuvent se déplacer dans la zone $x > 0$.
- Les particules franchissent la barrière de potentiel si $E > V_o$.

2.2 Traitement quantique du Cas $E < V_o$:

2.2.1 Dans la région $x < 0$:

Il s'agit d'un état quantique stationnaire :

- L'équation de Schrodinger indépendante du temps s'écrit :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_1(x)}{dx^2} = E\psi_1(x)$$

- Le module du vecteur d'onde \vec{k} :

On a $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ donc $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

- L'expression de la partie spatiale $\psi_1(x)$ de la fonction d'onde associée à la particule considérée :

$$\psi_1(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

2.2.2 Dans la région $x > 0$ où $V(x) = V_o$:

Ecrivons d'abord l'équation de Schrodinger dans la région considérée :

- L'équation de Schrodinger indépendante du temps s'écrit alors :

$$\frac{-\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} = (E - V_o)\psi_2(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)\psi_2(x) = 0$$

- Expression de la fonction d'onde : En posant $\gamma = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_o - E)}$ on aura :

$$\frac{d^2\psi_2(x)}{dx^2} - \gamma^2\psi_2(x) = 0 \Rightarrow \psi_2(x) = Ce^{-\gamma x} + C'e^{\gamma x}$$

- Or $|\psi_2|$ ne doit pas diverger lorsque $x \mapsto +\infty$ donc $C' = 0$ et par suite :

$$\psi_2(x) = Ce^{-\gamma x}$$

- Nature de l'onde dans la zone $x > 0$:

$\psi_2(x) \simeq 0$ pour $x \geq x_1 \simeq \frac{5}{\gamma}$ donc il s'agit d'une onde évanescence.

2.2.3 Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

Il s'agit d'un état quantique stationnaire :

- Les deux conditions de raccordement en $x = 0$:

Le continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première en $x = 0$ donne :

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ et } \left(\frac{d\psi_1(x)}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d\psi_2(x)}{dx}\right)_{x=0}.$$

- Coefficients de réflexion et de transmission en amplitude :

Les deux relations de continuité donnent : $A + B = C$ et $ik(A - B) = -\gamma C$ donc :

$$\frac{B}{A} = \frac{k - i\gamma}{k + i\gamma}$$

$$\frac{C}{A} = \frac{2k}{k + i\gamma}$$

2.2.4 Comparaison entre la physique classique et la physique quantique :

Comparons les deux prévisions classique et quantique :

- $|\frac{B}{A}|^2 = 1 \Rightarrow R = 1$ c'est à dire réflexion totale.

-Selon la mécanique classique les particules sont complètement réfléchies dans le cas $E < V_o$.

- $C \neq 0$ donc selon la mécanique quantique, il y'a des particules qui franchissent la barrière de potentiel en $x = 0$.

2.3 Traitement quantique du cas $E > V_o$:

2.3.1 Les conditions de raccordement de la fonction d'onde en $x = 0$:

La continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée première en $x = 0$ donne :

$$\psi(x = 0^-) = \psi(x = 0^+) \text{ et } \psi'(x = 0^-) = \psi'(x = 0^+)$$

Donc :

$$\begin{aligned} 1 + r &= t \\ 1 - r &= \frac{k_o}{k} \end{aligned}$$

2.3.2 Les coefficients de réflexion et de transmission en amplitude r et t :

En utilisant la question précédente on aura :

$$\begin{aligned} r &= \frac{2k}{k + k_o} \\ t &= \frac{k - k_o}{k + k_o} \end{aligned}$$

2.3.3 Les coefficients de réflexion et de transmission de courant de probabilité R et T :

Le calcul des coefficients de réflexion et de transmission de courant de probabilité se fait en répondant aux questions suivantes :

-Les vecteurs densité de courant de probabilité dans les deux zones $x < 0$ et $x > 0$:

$$\begin{aligned} \vec{j}_1 &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi_1 \frac{d\psi_1^*}{dx} - \psi_1^* \frac{d\psi_1}{dx}) \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j}_1 = \frac{\hbar|A|^2}{m} k(1 - r^2) \vec{e}_x \\ \vec{j}_2 &= \frac{i\hbar}{2m} (\psi_2 \frac{d\psi_2^*}{dx} - \psi_2^* \frac{d\psi_2}{dx}) \vec{e}_x \Rightarrow \vec{j}_2 = \frac{\hbar|A|^2}{m} k_o t^2 \vec{e}_x \end{aligned}$$

-Commentaire et conclusion :

Dans la zone $x < 0$ le vecteur densité de courant \vec{j}_1 contient deux termes d'incidence et de réflexion

et $\vec{j}_1 = \vec{j}_2$. On conclut que le courant de probabilité est conservé au passage entre les deux zones en $x = 0$.

-Identification des trois courants incident, réfléchi et transmis : On a

$$\begin{aligned}\vec{j}_1 &= \vec{j}_i + \vec{j}_r \text{ et } \vec{j}_2 = \vec{j}_t \\ \vec{j}_i &= \frac{\hbar|A|^2}{m} k \vec{e}_x \\ \vec{j}_r &= -\frac{\hbar|A|^2}{m} r^2 k \vec{e}_x \\ \vec{j}_t &= \frac{\hbar|A|^2}{m} t^2 k_o \vec{e}_x\end{aligned}$$

-Les coefficients de réflexion et de transmission de courant de probabilité :

$$\begin{aligned}R &= \frac{\|\vec{j}_r\|}{\|\vec{j}_i\|} \Rightarrow R = r^2 = \left(\frac{k - k_o}{k + k_o}\right)^2 \\ T &= \frac{\|\vec{j}_t\|}{\|\vec{j}_i\|} \Rightarrow T = t^2 \frac{k_o}{k} = \frac{4kk_o}{(k + k_o)^2} \\ R + T &= 1\end{aligned}$$

Ceci montre la conservation de courant de probabilité c'est à dire pas de perte de particules.

-Cas limites $k \rightarrow 0$ et $k \rightarrow +\infty$:

Pour $k \rightarrow 0$ c'est à dire E est infiniment petite on a $R \rightarrow 1$ et $T \rightarrow 0$ donc toutes les particules sont réfléchies.

Pour $k \rightarrow +\infty$ c'est à dire $E \gg V_o$ on a $k \simeq k_o$ alors $R \rightarrow 0$ et $T \rightarrow 1$ donc toutes les particules franchissent la barrière et se retrouvent dans la zone $x > 0$.

-Conclusion : Les cas limites ci-dessus donnent les prévisions de la mécanique classique.

3 Barrière de potentiel :

3.1 Exemples de barrières de potentiel :

On cite comme exemples faisant intervenir une barrière de potentiel :

- Microscope à effet tunnel.
- Fusion thermo-nucléaire.
- Radioactivité α .
- La bande interdite dans les semi-conducteurs.....

3.2 Condition de présence des particules dans la région $0 < x < a$:

Selon la mécanique classique, les particules sont présentes dans la région $0 < x < a$ si $E > V_o$.

3.3 Traitement quantique de la barrière de potentiel :

3.3.1 Expressions de la fonction d'onde dans les trois régions considérées :

Exprimons la fonction d'onde dans les différentes régions considérées :

-Dans la région $x \in]-\infty, 0] \cup [a, +\infty[$ on a $V(x) = 0$ donc l'équation de Schrodinger s'écrit :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

En posant $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ on aura :

.Pour $x \in]-\infty, 0] :$

$$\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + A'_1 e^{-ikx}$$

.Pour $x \in [a, +\infty[:$

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx} + A'_3 e^{-ikx}$$

-Pour $x \in]0, a[$ on a $V(x) = V_0$ donc l'équation de Schrodinger s'écrit :

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x) = 0$$

En posant $\gamma^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}$ on aura :

$$\psi_2(x) = A_2 e^{\gamma x} + A'_2 e^{-\gamma x}$$

-Expressions de k et γ :

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \text{ et } \gamma = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

3.3.2 Simplification de la fonction d'onde dans la zone $x > a$:

Dans la zone $x > a$, il n'y a pas d'onde réfléchie donc $A'_3 = 0$ et par suite :

$$\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$$

3.3.3 Les conditions de raccordement en $x = 0$ et $x = a$:

Exprimons la continuité de la fonction d'onde et sa dérivée première en $x = 0$ et $x = a$:

-En $x = 0$:

$$\psi_1(0) = \psi_2(0) \text{ et } \psi'_1(0) = \psi'_2(0)$$

-En $x = a$:

$$\psi_2(a) = \psi_3(a) \text{ et } \psi'_2(a) = \psi'_3(a)$$

Ces deux relations donnent finalement :

-En $x = 0$:

$$\begin{aligned} A_1 + A'_1 &= A_2 + A'_2 \\ ik(A_1 - A'_1) &= \gamma(A_2 - A'_2) \end{aligned}$$

-En $x = a$;

$$\begin{aligned} A_2 e^{\gamma a} + A'_2 e^{-\gamma a} &= A_3 e^{ika} \\ \gamma(A_2 e^{\gamma a} - A'_2 e^{-\gamma a}) &= ik A_3 e^{ika} \end{aligned}$$

3.3.4 Coefficients de réflexion R' et de transmission T' de la barrière :

D'après la question précédente on a : -Coefficient de transmission T' :

$$A_1 + A'_1 = A_2 + A'_2 \quad (7)$$

$$A_1 - A'_1 = \frac{\gamma}{ik}(A_2 - A'_2) \quad (8)$$

$$A_2 e^{\gamma a} + A'_2 e^{-\gamma a} = A_3 e^{ika} \quad (9)$$

$$A_2 e^{\gamma a} - A'_2 e^{-\gamma a} = \frac{ik}{\gamma} A_3 e^{ika} \quad (10)$$

Donc :

$$(7) + (8) \Rightarrow 2A_1 = A_2 + A'_2 + \frac{\gamma}{ik}(A_2 - A'_2) \quad (11)$$

$$(9) + (10) \Rightarrow A_2 = \frac{A_3}{2} e^{ika} \left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right) e^{-\gamma a} \quad (12)$$

$$(9) - (10) \Rightarrow A'_2 = \frac{A_3}{2} e^{ika} \left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right) e^{\gamma a} \quad (13)$$

Donc :

$$(12) + (13) \Rightarrow A_2 + A'_2 = \frac{A_3}{2} e^{ika} \left(\left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right) e^{-\gamma a} + \left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right) e^{\gamma a} \right) \quad (14)$$

$$(12) - (13) \Rightarrow A_2 - A'_2 = \frac{A_3}{2} e^{ika} \left(\left(1 + \frac{ik}{\gamma}\right) e^{-\gamma a} - \left(1 - \frac{ik}{\gamma}\right) e^{\gamma a} \right) \quad (15)$$

En injectant (14) et (15) dans (11) on aura :

$$A_1 = \frac{A_3}{4} e^{ika} \left[2(e^{\gamma a} + e^{-\gamma a}) + \left(\frac{ik}{\gamma} + \frac{\gamma}{ik}\right)(e^{\gamma a} - e^{-\gamma a}) \right] \Rightarrow A_1 = \frac{A_3}{4} e^{ika} \left[4ch(\gamma a) + 2\left(\frac{ik}{\gamma} + \frac{\gamma}{ik}\right)sh(\gamma a) \right] \quad (16)$$

En tenant compte du fait que $ch^2(u) = 1 + sh^2(u)$ on aura finalement :

$$T' = \left| \frac{A_3}{A_1} \right|^2 = \frac{4\gamma^2 k^2}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 sh^2(\gamma a)}$$

-Coefficient de réflexion R' : En injectant (14) et (16) dans l'équation (7) on aura le rapport $\frac{A'_1}{A_1}$ et par suite :

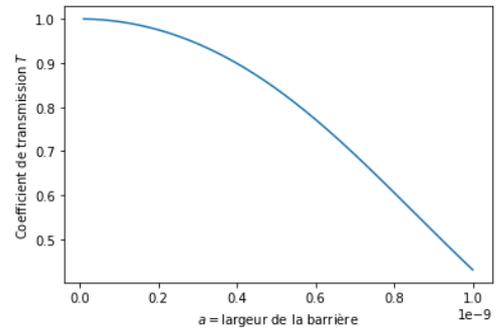
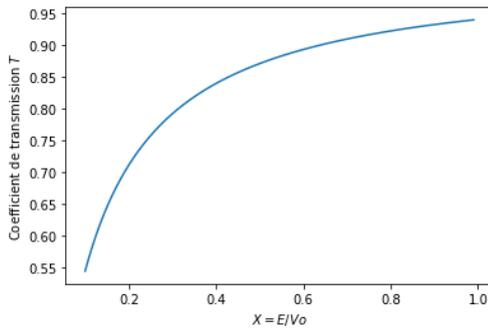
$$R' = \left| \frac{A_1'}{A_1} \right|^2 = \frac{(\gamma^2 + k^2)^2 sh^2(\gamma a)}{4\gamma^2 k^2 + (\gamma^2 + k^2)^2 sh^2(\gamma a)}$$

-Influence des paramètres E , a et V_o sur le coefficient de transmission :

.Influence de E :

En remplaçant $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ et $\gamma^2 = \frac{2m(V_o - E)}{\hbar^2}$ dans l'expression de T' on aura :

$$T' = \frac{1}{1 + \frac{(e^{\gamma a} - e^{-\gamma a})^2}{16 \frac{E}{V_o} (1 - \frac{E}{V_o})}} \Rightarrow T' = \frac{1}{1 + \frac{(e^{\frac{\sqrt{2mV_o(1-X)}}{\hbar} a} - e^{-\frac{\sqrt{2mV_o(1-X)}}{\hbar} a})^2}{16X(1-X)}} \quad (17)$$



-Conclusion 1 : Le tracé de T en fonction de $X = \frac{E}{V_o}$, avec ($a = 1nm$), montre que T est croissante ceci montre que :

. T augmente lorsque E augmente.

. T diminue lorsque V_o augmente.

-Conclusion 2 : Le tracé de T en fonction de la largeur a de la barrière, avec $X = \frac{E}{V_o} = 0.5$ et $V_o = 1eV$, montre que T décroît lorsque a augmente.

3.3.5 Expressions approchées de T dans les cas limites de la largeur a de la barrière :

Dans les deux cas limites $a \rightarrow 0 \Rightarrow \gamma a \ll 1$ et $\gamma a \gg 1$ on aura :

-Cas d'une barrière mince c'est à dire $\gamma a \ll 1 \Rightarrow sh(\gamma a) \simeq \gamma a$:

$$sh(\gamma a)^2 \simeq (\gamma a)^2 \Rightarrow T' \simeq \frac{1}{1 + \frac{ma^2 V_o^2}{2\hbar^2}}$$

-Cas d'une barrière très épaisse c'est à dire que $\gamma a \gg 1 \Rightarrow sh(\gamma a) \simeq \frac{e^{\gamma a}}{2}$:

$$sh(\gamma a)^2 \simeq \frac{e^{2\gamma a}}{4} \Rightarrow T' \simeq \frac{16E(V_o - E)}{V_o^2} e^{-2\gamma a}$$

-Cas où $E \rightarrow V_o \Rightarrow \gamma \rightarrow 0$:

$$T' \simeq \frac{1}{1 + \frac{k^2 a^2}{4}} \Rightarrow T' \simeq \frac{1}{1 + \frac{m a^2 E}{2 \hbar^2}}$$

-Les résultats des deux cas limites sont en bon accord avec la mécanique classique.

3.3.6 Influences de certains paramètres dans le cas limite $\gamma a \gg 1$:

Dans ce cas limite le coefficient T' de transmission s'écrit :

$$T' \simeq \frac{16E(V_o - E)}{V_o^2} e^{-2\gamma a} \Rightarrow T' \simeq \frac{16E(V_o - E)}{V_o^2} e^{-\sqrt{2m(V_o - E)} \frac{2a}{\hbar}}$$

-Influence de la masse de la particule : Si m augmente T' diminue c'est à dire les particules relativement légères (électrons par exemple) font l'effet tunnel mieux que les particules lourdes.

-Lorsque a augmente T' diminue c'est à dire que c'est difficile de faire l'effet tunnel avec des barrières suffisamment large.

-Lorsque $(V_o - E)$ augmente T' diminue c'est à dire que l'effet tunnel est peu probable à travers des barrières de hauteur suffisamment grande.

-Applications numériques et discussions :

.Pour l'électron : $T' \simeq 1.8 * 10^{-4}$.

.Pour le proton : $T' \simeq 1.3 * 10^{-190}$.

.Comparaison : $T'_{\text{electron}} \gg T'_{\text{proton}}$.

.Conclusion : L'électron fait l'effet tunnel beaucoup mieux que le proton ($m_p \gg m_e$).

.Pour l'électron $\gamma a \simeq 5$ donc $\gamma a \gg 1$ n'est pas valable.

.Pour le proton $\gamma a \simeq 200$ donc $\gamma a \gg 1$ est valable.

3.3.7 Courant de probabilité dans les trois régions considérées :

Exprimons le vecteur densité de courant de probabilité dans les trois régions considérées :

-Dans la région $x < 0$ on a $\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + A'_1 e^{-ikx}$ et en utilisant la définition du vecteur densité de courant de probabilité on aura :

$$\vec{J}_1 = \frac{\hbar A_1^2 k}{m} (1 - R) \vec{e}_x$$

-Dans la région $0 < x < a$ on ψ_2 est une fonction réelle donc $\psi_2 = \psi_2^*$ et par suite :

$$\psi_2^* \vec{\nabla} \psi_2 - \psi_2 \vec{\nabla} \psi_2^* = \vec{0} \Rightarrow \vec{J}_2 = \vec{0}$$

-Dans la région $x > a$ on a $\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$ donc d'après la définition on aura :

$$\vec{J}_3 = \frac{\hbar A_3^2 k}{m} T \vec{e}_x$$

-On a $\vec{J}_1 = \vec{J}_3$ donc $R + T' = 1$.

-Sens physique de la relation $R + T' = 1$: Cette relation exprime la conservation du courant de probabilité.

3.4 Modification des expressions de la fonction d'onde dans la cas où $E > V_o$:

Dans les régions $x < 0$ et $x > a$ pas de modifications puisque $V(x) = 0$ donc :

-Dans la région $x < 0$ on a $\psi_1(x) = A_1 e^{ikx} + A'_1 e^{-ikx}$.

-Dans la région $x > a$ on a $\psi_3(x) = A_3 e^{ikx}$.

Dans la région $0 < x < a$ on a une modification puisque $(V_o - E) < 0$:

-Dans cette région on pose $k'^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E - V_o)$ et on aura comme solution : $\psi_2(x) = A_2 e^{ik'x} + A'_2 e^{-ik'x}$.

4 Application : microscope à effet tunnel :

4.1 Rôle du microscope à effet tunnel :

Ce microscope ne permet pas de voir les atomes au vrai sens du terme.

Il permet de tracer le relief de la surface balayée par la pointe.

4.2 Expression de la densité de courant tunnel :

On a $J_T = \beta U T'$ et il s'agit d'une barrière épaisse, d'après la question 3.3.6, on a $T' \simeq \frac{16E(V_o - E)}{V_o^2} e^{-\sqrt{2m(V_o - E)} \frac{2a}{\hbar}}$ soit donc

$$J_T = \frac{16\beta U E(V_o - E)}{V_o^2} e^{-\sqrt{2m(V_o - E)} \frac{2a}{\hbar}}$$

4.3 Variation relative du courant électrique tunnel pour $\Delta a = 0.1nm$

On a $I_T = I_o e^{-2\gamma a}$ donc $\ln(I_T) = \ln(I_o) - 2\gamma a$ donc $\frac{dI_T}{I_T} = -2\gamma da$ soit finalement :

$$\frac{\Delta I_T}{I_T} = 2\gamma \Delta a \Rightarrow \frac{\Delta I_T}{I_T} = 2\sqrt{2m(V_o - E)} \frac{\Delta a}{\hbar}$$

Application numérique : $\frac{\Delta I_T}{I_T} \simeq 0.9$.

4.4 Résolution en profondeur pour $\frac{\Delta I_T}{I_T} = 0.1$:

$$\Delta a = \frac{1}{2\gamma} \frac{\Delta I_T}{I_T} \Rightarrow \Delta a \simeq 4.6pm$$

5 Mesure du courant tunnel :

5.1 Fonction de transfert du montage :

L'impédance équivalente de l'association parallèle de la résistance R_p et de la capacité C_p est

$\underline{Z}_{eq} = \frac{R_p}{1 + jR_p C_p \omega}$, donc :

-La fonction de transfert demandée est :

$$\underline{Z} = \frac{V_T}{I_T} = -\underline{Z}_{eq} \Rightarrow \underline{Z} = -\frac{R_p}{1 + iR_p C_p \omega}$$

-Il s'agit donc d'un passe-bas.

-La fréquence de coupure de ce montage passe-bas est $f_c = \frac{1}{2\pi R_p C_p}$.

5.2 Calcul de la transimpédance :

Dans la bande passante on $R_p C_p \omega \ll 1$ donc :

$$-\underline{Z} \simeq R_p.$$

$$-V_T \simeq -R_p I_T \Rightarrow V_T \simeq -0.1V.$$

5.3 Amélioration de comportement fréquentiel du montage :

5.3.1 La nouvelle fonction de transfert :

Si on note A le noeud défini par les trois branches R_c , C_c et $\underline{Z}_{eq} = \frac{R_p}{1+iR_p C_p \omega}$ alors :

-Le théorème de Millman appliqué en A donne : $\underline{V}_A = \frac{\frac{V_T}{R_c}}{\frac{1}{R_c} + iC_c \omega + \frac{1}{\underline{Z}_{eq}}}$ d'une part et $\underline{V}_A = \underline{Z}_{eq} \underline{I}_T$ d'autre part donc :

$$\underline{Z}' = \frac{V_T}{I_T} = R_c \underline{Z} \left(\frac{1}{R_c} - \frac{1}{\underline{Z}} + iC_c \omega \right)$$

Soit finalement :

$$\underline{Z}' = -R_c - R_p \frac{1 + iR_c C_c \omega}{1 + iR_p C_p \omega} \Rightarrow \underline{Z}' = -(R_c + R_p \frac{1 + i\tau_c \omega}{1 + i\tau_p \omega})$$

$$-\tau_c = R_c C_c.$$

$$-\tau_p = R_p C_p.$$

5.3.2 Valeur de la capacité de compensation C_c :

Pour augmenter la bande passante il faut que $\tau_c = \tau_p$ donc :

$$-R_c C_c = R_p C_p.$$

-Application numérique : $C_c = 50pF$.

5.3.3 La compensation est non parfaite :

La compensation des capacités parasites n'est pas parfaite.

-Le montage considéré est un passe-bas d'où la forme de la fonction de transfert.

-Lorsque $\omega \rightarrow 0$ Les impédances des deux capacités sont infinies donc la fonction de transfert $\underline{Z}' \simeq -(R_c + R_p) \simeq R_o$.

-Application numérique : $R_o \simeq -1G\Omega$.

5.4 Utilisation du montage logarithmique :

5.4.1 Opérations réalisées par chacun des deux étages du circuit :

Les opérations réalisées par les deux étages sont :

-Premier étage : montage logarithmique.

-Deuxième étage : amplificateur inverseur.

5.4.2 Forme logarithmique de V_T en fonction de V_L :

On a les deux amplificateurs opérationnels sont *idéaux* et fonctionnent en régime *linéaire* donc l'entrée différentielle $\varepsilon = 0$ et par suite : $V_T = R_o I_T$ et le théorème de Millman à l'entrée inverseuse de deuxième étage donne $\frac{V_L}{R_2} + \frac{-U_D}{R_1} = 0 \Rightarrow U_D = \frac{R_1}{R_2} V_L$, soit finalement :

$$V_T = R_o I_S \exp\left(\frac{R_1}{R_2} \frac{e}{K_B T} V_L\right)$$

Par identification on aura :

$$-V_{T_o} = R_o I_S.$$

$$-V_{L_o} = \frac{R_2}{R_1} \frac{K_B T}{e}$$

Applications numériques :

-Le diagramme donne $V_{T_o} = 10V$.

$$-V_{L_o} = 0.87V.$$

5.4.3 Association série des deux montages convertisseur amplificateur et amplificateur logarithmique :

Dans la bande passante $Z' \simeq R_o \Rightarrow V_T = R_o I_T$ donc :

$$V_L = V_{L_o} \ln\left(\frac{R_o I_T}{V_{T_o}}\right) \Rightarrow V_L = V'_{L_o} \ln\left(\frac{I_T}{I_{T_o}}\right)$$

Avec :

$$-V'_{L_o} = V_{L_o} = \frac{R_2}{R_1} \frac{K_B T}{e}$$

$$-I_{T_o} = \frac{V_{T_o}}{R_o} = I_S$$